Formelsammlung Nachrichtenübertragungstechnik

Markus Becker

16. Juli 2010

1 Einleitung und grundlegende Verfahren

Klirrfaktor	$k = \frac{\sqrt{U_{a2}^2+U_{a3}^2+U_{a4}^2+\cdots}}{\sqrt{U_{a1}^2+U_{a2}^2+U_{a3}^2+U_{a4}^2+\cdots}}$
Rauschspannung	$U_r = \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot R \cdot B}$ mit $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{Ws}{K}$ | $P_{RE} = k \cdot T \cdot B$
Logarithmischer Maßstab	$20 \cdot log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) dB$; $10 \cdot log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) dB$
Idealer Übertragungkanal	$\|H(f)\| = K = const$; $arc\,(H(f)) = \varphi(f) = -2\pi f t_0$ (linear abh. von f)
Phasen- und Gruppenlaufzeit	$t_{Ph} = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega}$; $t_{Gr} = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$
Nachrichtenquader	$H = 2B \cdot T \cdot D$ mit $H =$ Nachrichtenmenge in bit; $B =$ Bandbreite, die zur Verfügung steht; $T =$ Zeitdauer der Übertragung; $D =$ Dynamik
Dynamik D	$D \approx \sqrt{\frac{P_S+P_N}{P_N}}$ mit $P_N =$ Störleistung; $P_S =$ Signalleistung $D = A_{max} - Amin$ mit $A_i = 20 \cdot log\left(\frac{U_i}{U_1}\right) dB$ U_{max} häufig Übersteuerungsgrenze, U_{min} häufig Rauschspannung
Störabstand p (SRA, SNR)	$p = 10 \cdot log\left(\frac{P_S}{P_N}\right) dB$; für $P_S >> P_N$ gilt: $H = 0.332 \cdot B \cdot T \cdot \frac{p}{dB}$
Kanalkapazität C	$C = \frac{H}{T}\left[\frac{bit}{s}\right] = B \cdot log_2\left(\frac{P_S+P_N}{P_N}\right) \approx \frac{B}{3} \cdot log\left(\frac{P_S}{P_N}\right) = \frac{B}{3} \cdot p$ (nach Shannon)
Frequenzmodulation	$B_{FM} = 2(\Delta f_T + f_S)$ mit $\Delta f_T = M \cdot f_{S,max} =$ Frequenzhub des Trägers $f_S =$ Signalbandbreite bzw. max. Signalfrequenz $M =$ Modulationsindex (hier meist $2 \cdots 3$) Für hohe Genauigkeit bei kleinen Amplituden: $B_{FM} = 2f_S(M+2)$
Amplitudenmodulation	$B_{AM} \geq 2 \cdot f_S$ (Zweiseitenband-AM) bzw. $B_{AM} = f_S$ (Einseitenband-AM)
Bitfehlerrate	$BER = F = \frac{N_f}{N} = \frac{N_f}{R \cdot t_m}$ mit $N =$ Gesamtzahl der Bits $N_f =$ Zahl der fehlerhaften Bits $R =$ Bitrate $[bit/s]$ | $t_m =$ Messzeit $[s]$
Zeitmultiplex	$T_e = \frac{\Delta t}{n \cdot k} = \frac{1}{f_0 \cdot n \cdot k}$ | $v_u = f_0 \cdot n \cdot k$ | $f_{g,min} = \frac{v_u}{2} = \frac{f_0 \cdot n \cdot k}{2}$ | mit $k =$ Kanalzahl; $n =$ Bit-Anzahl pro Abtastwert (Codewort); $T_e =$ Bitdauer; $v_u =$ Übertragungsrate (Bitrate) in $bit/2$ $f_{g,min} =$ Mindestfreq.bandbreite bei NRZ-Code
Zwischenfrequenz	$f_{ZF} = f_{Osz} - f_{HF}$ mit Ringmodulator

2 Rauschen

Rauschspannung	$U_r = \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot R \cdot B}$ mit $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{Ws}{K}$ $P_{RE} = k \cdot T \cdot B$ (bei Leistungsanpassung)
Rauschbandbreite	$B = \frac{1}{(\lvert H \rvert_{max})^2} \cdot \int\limits_0^\infty \lvert H(f)^2 \rvert df$

2.1 Rauschender Vierpol

Rauschzahl	$F = \frac{(P_S/P_R)_{Eing}}{(P_S/P_R)_{Ausg}} = \frac{P_{S,1}/P_{R,1}}{P_{S,2}/P_{R,2}} = \frac{v_p \cdot P_{R,1} + P_z}{v_p \cdot P_{R,1}} = 1 + F_z$ mit $F_z = \frac{P_z}{v_p \cdot P_{R,1}}$ = zusätzliche Rauschzahl; v_p = Leistungsverstärkung; P_z = Rauschleistung des Vierpols $P_{R,2}[dB] = 10 \cdot log(P_{R,1}) - 10 \cdot log(F)$
Rauschtemperatur	$F = \frac{T_Q + T_R}{T_Q}$ mit T_Q = Temperatur des Quellwiderstandes
Standardrauschzahl	$F_{(290)} = 1 + \frac{T_R}{290K}$ | $F(T_1) = \frac{290K}{T_1} \cdot \big(F_{(290)} - 1\big) + 1$
Modell	$U_{R,V,eff} = \sqrt{4 \cdot k \cdot T_0 \cdot B \cdot R_ä}$ | $I_{R,V,eff} = \sqrt{4 \cdot k \cdot T_0 \cdot B \cdot G_ä}$ $U_{R,Q,eff} = \sqrt{4 \cdot k \cdot T_Q \cdot B \cdot R_Q}$ | mit $R_ä$ = (fiktiver) äquivalenter Rauschwiderstand des Vierpols $G_ä$ = (fiktiver) äquivalenter Rauschleitwertstand des Vierpols
Standardrauschzahl	$F_{(290)} = 1 + \frac{R_ä}{R_Q} + R_Q G_ä$
Für $R_Q << W_1$ (Vierpol-Eingangsimpedanz	$F = 1 + \frac{U^2_{RVeff}}{U^2_{RQeff}} = 1 + \frac{R_{ae}}{R_Q} \cdot \frac{T_0}{T_Q}$
Rauschanpassung	$R_{Q,opt} = \sqrt{\frac{R_ä}{G_ä}}$ | $F_{min} = 1 + 2\frac{T_0}{T_Q}\sqrt{R_ä \cdot G_ä}$
Kaskadieren von rauschenden Vierpolen	$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{v_{p1}} + \frac{F_3 - 1}{v_{p1} \cdot v_{p2}} + \dots$ $T_R = T_{R1} + \frac{T_{R2}}{v_{pq}}$

3 Amplitudenmodulation

Modulationsgrad	$m = \frac{\hat{u}_S}{\hat{u}_T} = \frac{\Delta \hat{u}_T}{\hat{u}_T}$ $u_{AM}(t) = \hat{u}_T \cdot \left[cos\omega_T t + \frac{m}{2} \cdot cos\left(\omega_T + \omega_S\right) t + \frac{m}{2} \cdot cos\left(\omega_T - \omega_S\right) t\right]$
Leistung und Spannung	$P_{AM} = P_T + P_{USB} + P_{OSB}$ | $P_{AM} = P_T \cdot \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)$ $U_{AM,max} = (1 + m) \cdot \hat{u}_T$ | $U_{AM,min} = (1 - m) \cdot \hat{u}_T$ $U_{AM,eff} = U_{T,eff} \cdot \sqrt{1 + \frac{m^2}{2}}$

4 Winkelmodulation

Phasenänderung	$u_{WM}(t) = \hat{u}_T \cdot cos\left(\omega_T t + \Delta\varphi_T \cdot cos\omega_S t\right)$ | $\Delta f_T = \Delta\varphi_T \cdot f_S$
Carson-Regel	$b_{WM} = 2 \cdot f_S \cdot (\Delta\varphi_T + 1) = 2 \cdot (\Delta f_T + f_S) \rightarrow$ Klirrfaktor $k \leq 10\%$ $b_{WM} = 2 \cdot f_S \cdot (\Delta\varphi_T + 2) = 2 \cdot (\Delta f_T + 2f_S) \rightarrow$ Klirrfaktor $k \leq 1\%$
Modulationsindex	$M = \frac{\Delta f_T}{f_S} = \Delta\varphi_T = 2 \dots 5$
FM	$\Delta f_T \sim \hat{u}_S$ | $\Delta\varphi_T = \frac{\Delta f_T}{f_S}$ $f_{Tw}(t) = \Delta f_T \cdot cos(\omega_S t)$ | $f_{WM}(t) = f_t + f_{Tw}(t)$ $\varphi_{Tw}(t) = 2\pi \cdot \int f_{Tw}(t)dt$ | $\varphi_{WM}(t) = \omega_T \cdot t + \varphi_{Tw}(t)$
PM	$\Delta\varphi_T \sim \hat{u}_S$ | $\Delta f_T = \Delta\varphi_T \cdot f_S$ $\varphi_{Tw}(t) = \Delta\varphi_T \cdot cos(\omega_S t)$ | $\varphi_{WM}(t) = \omega_T \cdot t + \varphi_{Tw}(t)$ $f_{Tw} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi_{Tw}(t)}{dt}$ | $f_{WM} = f_T + f_{Tw}(t)$

4.1 Modulationsgewinn

Basisbandübertragung	$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{S_R}{N \cdot B}$
ZSB-AM mit Träger	ZSB $\rightarrow B_{Ue} = 2B$ | $\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{S_R}{2 \cdot N \cdot B}$ | $\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{S_R}{N \cdot B}$
ZSB-AM ohne Träger	$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{S_R}{2 \cdot N \cdot B}$ | $\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{S_R}{N \cdot B}$
ESB-AM ohne Träger	$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{S_R}{N \cdot B}$
FM	$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 3 \cdot \left(\frac{\Delta f_T}{B}\right)^2 \cdot \frac{B_{ue}}{2 \cdot B} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{in}$ für sinusförmige Modulationssignale gilt: $\Delta f_T = M \cdot B$ Damit folgt: $\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 3M^2 \cdot \frac{B_{ue}}{2 \cdot B} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{in}$ 1. Schwellwert bei $\left(\frac{S}{N}\right)_{in} \approx 9dB$: FM und Basisband gleichwertig 2. Schwellwert bei $\left(\frac{S}{N}\right)_{in} \approx 12dB$: FM-Gewinn maximal FM-Gewinn ggü. ZSB-AM ohne Träger, ESB-AM ohne Träger und Basisbandmodulation: $FM - Gewinn_{AM} \approx \frac{3}{2}\left(\frac{\Delta f_T}{B}\right)^2 \approx \frac{3}{2}M^2$ | in db: $10log\left(\frac{3}{2} \cdot M^2\right) dB$
PM	$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 3M^2 \cdot \frac{B_{ue}}{2 \cdot B} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{in}$

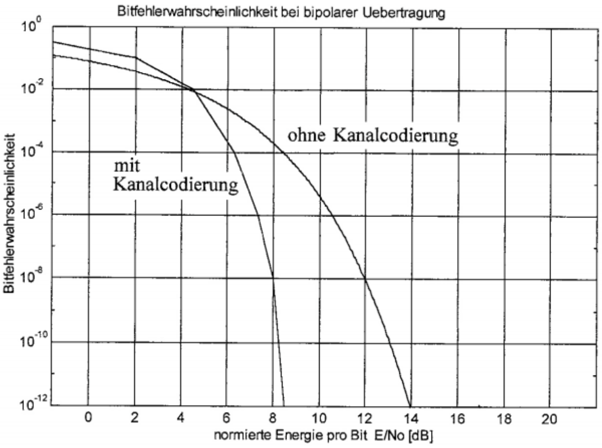
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in(ZSB-AMmitTraeger)} = \left(\frac{S}{N}\right)_{in(ZSB-AMohneTraeger)} = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{N}\right)_{in(ESB-AMohneTraeger)}$$

$$= \left(\frac{S}{N}\right)_{in(FM)} \cdot \frac{B_{Ue(FM)}}{B_{Ue(AM,Basisband)}} = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{N}\right)_{in(Basisband)}$$

5 Digitale Modulation - Basisbandübertragung

Quantisierer	$\Delta U = \frac{U_Q}{s} = \frac{2 \cdot \hat{u}_{max}}{s}$ mit s = Anzahl der Stufen = 2^n mit n = Anzahl der Bit maximaler Fehler $U_{F,max} = \frac{\Delta U}{2} = \frac{U_Q}{2s}$ Übertragungsrate $f_B \geq 2 f_{NF,max} * n * K$ mit K = Kanalzahl
Kanalcodierung	RZ-Code: $f_a[Hz] = f_b[bit/s]$ | NRZ-Code: $f_a[Hz] = \frac{1}{2} f_b[bit/s]$
Dynamik (symmetrische Aussteuerung)	$D \approx n \cdot 6[dB] \approx SNR_{Qmax}$ (SNR bei max. Signalamplitude) Faustformel für AD-Wandler: $u_{eff,analog} = \frac{\hat{u}_{max}}{4}$
Kanalkapazität	$C[bit/s] \approx \frac{B}{3} * SNR[db]$ max. (weißes Rauschen): $C_{max}[bit/s] = \frac{P_S}{k \cdot T \cdot \ln(2)}$ Energie pro bit: $\frac{W_{b,min}}{k \cdot T} = \ln(2) \approx -1.6dB$
Antialiasing-Filter	Dämpfung bei $f_A/2$: $\geq SNR_Q$
Bitfehler	$BER = \frac{N_{FehlerhafteBit}}{N} = \frac{N_{FehlerhafteBit}}{R \cdot t_{mess}}$ | $t_1 = \frac{1}{R \cdot BER}$ mit R = Bitrate | t_1 Mittlere Zeit, bis ein fehlerhaftes Bit

Bitfehler / SNR Aufgrund der geänderten Abszissennormierung ergibt sich eine Verschiebung um $3dB$ im Vergleich zm SNR.



Mehrwertige Codes

Wertigkeit M	Anzahl der Signalpegel bzw. Codepegel, Stufenzahl, Symbole
Schrittgeschwindigkeit f_{Sch}	Anzahl der Zustandsänderungen pro Sekunde in baud
Schritt-/Symboldauer T_{Sch}	Zeitdauer eines Schritts ($= \frac{1}{f_{Sch}}$)
Bitrate	$f_B = f_{Sch} \cdot \log_2 M$
Spektrale Effizienz	$\frac{f_B}{BUe} = 2\log_2 M \frac{bit/s}{Hz}$ mit $B_{Ue} = \frac{f_{Sch}}{2}$

Übertragungsformate, Spektren, Nyquistfilter, Inter-Symbol-Interferenz

Nyquistfrequenz	$B_N = \frac{f_{Sch}}{2} = \frac{Baudrate}{2}$ = theoretisch minimale Bandbreite zur Übertragung

1. Nyquist-Kriterium

Die digitalen Impulse werden auf die Symboldauer Δt beschränkt oder zur Pulsformung wird ein Tiefpass verwendet, dessen Impulsantwort äquidistante Nullstellen im Abstand der Bit- bzw. Symboldauer aufweist. Solche Tiefpässe sind Filter mit punktsymmetrischer Flanke, der sog. Nyquistflanke. Der Symmetriepunkt liegt bei der Nyquistfrequenz.

Nyquistfilter

$$\frac{H(f)}{H_{\max}} = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{B_N - f}{\Delta f} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{B_N - f}{\Delta f}\right) & ; B_N - \Delta f < |f| < B_N + \Delta f \\ 1 & ; |f| < B_N - \Delta f \\ 0 & ; |f| > B_N + \Delta f \end{cases}$$

mit Roll-Off-Faktor $r = \frac{\Delta f}{B_N}$ und $0 \leq r \leq 1$; Für $r > 0$ ergibt sich eine erhöhte Übertragungsbandbreite: $B_{Ue} = B_N \cdot (1 + r) = \frac{f_{Sch}}{2} \cdot (1 + r)$

Datenrate bei Basisbandübertragung	$f_B = \log_2 M \cdot \frac{2B_{Ue}}{1+r}$ mit $f_B =$ Datenrate in bit/s z. B. nach Shannon
Spektrale Effizienz	$\frac{f_B}{B_{Ue}} = \frac{2\log_2 M}{1+r} \left[\frac{bit/s}{Hz}\right]$

6 Digitale Modulation harmonischer Träger

Signal-Rausch-Abstand	$SNR = \frac{P_S}{P_R} = \frac{W_B}{N_0} \cdot \frac{f_B}{B}$

Übertragungsbandbreite

M-ASK, M-PSK, M-QAM	$\frac{f_B}{B_{HF}} = \frac{\log_2 M}{1+r} \left[\frac{bit/s}{Hz}\right]$
FSK	für Frequenzdifferen $2\Delta f \geq \frac{1}{T_B}$: Carson-Formel: $B_{HF} = 2 \cdot (\Delta f + B_{NF})$ mit $B_{NF} = \frac{f_B}{2} \cdot (r+1)$
M-FSK	Für Annahme: Phasenänderung um Π während einer Symboldauer: $\frac{f_B}{B_{HF}} = \frac{\log_2 M}{M}$