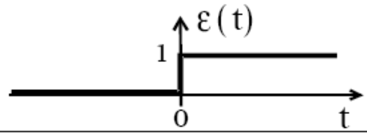
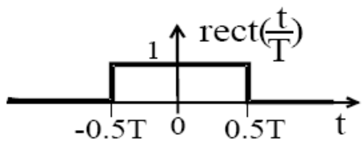
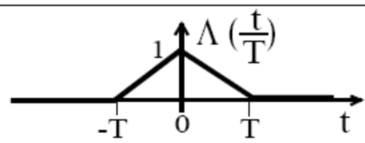
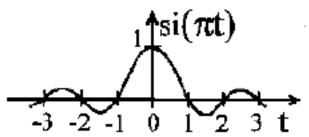
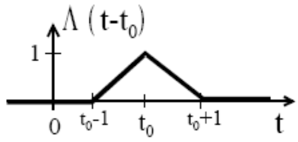
FOSA Signale und Systeme

1. Signale

Kosinussignal (harmonische Schwingung)	$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ mit $\omega = 2\pi f$ und $f = \frac{1}{T}$ (f = Frequenz; T=Periodendauer; A=Amplitude; ω=Kreisfrequenz; φ=Phase)	
Sprungfunktion	$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$	
Rechteckimpuls	$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } \left\lvert\frac{t}{T}\right\rvert \leq 0.5 \\ 0 & \left\lvert\frac{t}{T}\right\rvert > 0.5 \end{cases}$	
Dreieckimpuls	$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \left\lvert\frac{t}{T}\right\rvert & \text{für } \lvert t\rvert < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	
si-Funktion	$\text{si}(\pi t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$	
Darstellung verschobener Signale	$s(t) = \Lambda(t - t_0)$	

2. Fourier-Reihe:

Es gilt die sogenannte **Fourier-Reihe**

$$\boxed{x_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos(2\pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) + b_k \cdot \sin(2\pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \right]}$$

mit den **Fourier-Koeffizienten** a_k und b_k.

Die Fourier-Koeffizienten a_k, b_k können aus $x_p(t)$ wie folgt berechnet werden:

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t) \cdot \cos(2\pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t)\, dt \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq n$$

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t) \cdot \sin(2\pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t)\, dt \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\cos(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2} \qquad \sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t) \cdot e^{-j\,2\pi\,k f_0 t}\,dt \quad \text{und} \quad c_k = \frac{a_k}{2} - j\frac{b_k}{2}$$

Jedes beliebige Signal lässt sich in ein gerades und ungerades Teilsignal zerlegen. Es gilt:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{\frac{x(t)}{2} + \frac{x(-t)}{2}}_{x_g(t)} + \underbrace{\frac{x(t)}{2} - \frac{x(-t)}{2}}_{x_u(t)}}$$

Dirac-Impuls (Eigenschaften):

$\delta(t \neq 0) = 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$

-> unendlich schmaler Impuls, Fläche darunter = 1 -> $\delta(t = 0) = \infty$

3. Fourier-Transformation:

Fourier-Transformation

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\,dt}$$

oder für $\omega = 2\pi f$

$$\boxed{X(f) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\,dt}$$

Fourier-Rücktransformation

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{+j\omega t}\,d\omega}$$

oder für $\omega = 2\pi f$

$$\boxed{x(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{+j2\pi f t}\,df}$$

	Originalfunktion $x(t)$	**Bildfunktion** $X(j\omega)$
Linearität:	$k_1 \cdot x_1(t) + k_2 \cdot x_2(t)$	$k_1 \cdot X_1(j\omega) + k_2 \cdot X_2(j\omega)$
Verschiebungssatz: (Verschiebung im Zeitbereich)	$x(t - t_0)$	$X(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
Modulationssatz: (Verschiebung im Frequenzbereich)	$x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Ähnlichkeitssatz: (Zeitskalierung)	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$ für $a \neq 0$
Frequenzskalierung:	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot x\left(\frac{t}{a}\right)$ für $a \neq 0$	$X(j\omega \cdot a)$
Differentiation im Zeitbereich:	$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(j\omega)^n \cdot X(j\omega)$
Integration im Zeitbereich:	$x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{j\omega} \cdot X(j\omega) + \frac{1}{2} X(0) \cdot \delta(\omega)$

Dualität:	$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(j\omega) \Rightarrow X(jt) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi \cdot x(-\omega)$	
Faltung im Zeitbereich:	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega) \cdot Y(j\omega)$
Faltung im Frequenzbereich:	$(2\pi) \cdot x(t) \cdot y(t)$	$X(j\omega) * Y(j\omega)$

Originalfunktion	Bildfunktion
$a \cdot \delta(t)$	a
a	$2\pi \cdot a \cdot \delta(\omega)$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$
$rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \cdot si\left(\frac{\omega}{2} \cdot T\right)$
$si\left(\frac{t}{2} \cdot \Omega\right)$	$\frac{2\pi}{\Omega} \cdot rect\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \cdot \left[si\left(\frac{\omega}{2} \cdot T\right)\right]^2$
$\left[si\left(\frac{t}{2} \cdot \Omega\right)\right]^2$	$\frac{2\pi}{\Omega} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)$
$\cos(\omega_0 \cdot t)$	$\pi \cdot [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 \cdot t)$	$\frac{\pi}{j} \cdot [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\varepsilon(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$	$\frac{\pi}{2} \cdot [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\varepsilon(t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$	$\frac{\pi}{2j} \cdot [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2}$
$e^{-a\|t\|}, a > 0$	$\frac{2 \cdot a}{a^2 + \omega^2}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-a \cdot t}, a > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$

Symmetrieeigenschaften:

$$x(t) = ag(t) + au(t) + j[bg(t) + bu(t)]$$

$$X(j\omega) = \mathrm{Re}\{Ag(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{Au(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{Bg(j\omega)\} + \mathrm{Re}\{Bu(j\omega)\}$$

Faltung:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau)\,d\tau \qquad z(t) = x(t) * y(t) \leftrightarrow Z(j\omega) = X(j\omega) \cdot Y(j\omega)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Korrelation:

$$\boxed{\varphi_{xy}^{E}(\tau) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t+\tau)\,dt = x(t) \otimes y(t)}$$

Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) für Energiesignale

Sonderfall $x(t) = y(t)$:

$$\boxed{\varphi_{xx}^{E}(\tau) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t+\tau)\,dt = x(t) \otimes x(t)}$$

Autokorrelationsfunktion (AKF) für Energiesignale

Energiedichtespektrum:

$$\phi_{XX}^{E}(\omega) = F\{\varphi(\tau)\} = |X(j\omega)|^2 \qquad E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}^{E}(\omega)\,d\omega$$

4. Laplace-Transformation:

Einseitige Laplace-Transformation	Zweiseitige Laplace-Transformation	Laplace-Rücktransformation
$X(s) = \int_{t=0^-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st}\,dt$	$X(s) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st}\,dt$	$x(t) = \frac{1}{2\pi\, j} \cdot \int_{s=\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \cdot e^{st}\,ds$

mit $\boxed{s = \sigma + j\,\omega}$

Partialbruchzerlegung:

- Bestimmung der Polstellen des zu transformierenden Ausdrucks X(s). Hierbei erhält man ggf.:
  - einfache Polstellen $(s - s_\infty)$
  - N-fache Polstellen $(s - s_\infty)^N$
  - einfache komplexe Polstellen $(s - s_\infty) \cdot (s - s_\infty^*)$
  - N-fache komplexe Polstellen $[(s - s_\infty) \cdot (s - s_\infty^*)]^N$

- Der Ausdruck X(s) kann nun als Summe von Partialbrüchen dargestellt werden, wobei jeweils je nach Art der Polstelle folgende Ausdrücke angesetzt werden müssen:
  - Für jede einfache Polstelle: $\frac{A}{s-s_\infty}$
  - Für jede N-fachen Polstelle: $\frac{A_1}{(s-s_\infty)^N}+\frac{A_2}{(s-s_\infty)^{N-1}}+\cdots+\frac{A_N}{s-s_\infty}$
  - Für jede einfache komplexe Polstelle: $\frac{B\cdot s+C}{(s-s_\infty)\cdot(s-s_\infty^*)}$
  - Für jede N-fachen komplexe Polstelle:

$$\frac{B_1\cdot s+C_1}{\left[(s-s_\infty)\cdot(s-s_\infty^*)\right]^N}+\frac{B_2\cdot s+C_2}{\left[(s-s_\infty)\cdot(s-s_\infty^*)\right]^{N-1}}+\cdots+\frac{B_N\cdot s+C_N}{(s-s_\infty)\cdot(s-s_\infty^*)}$$

- Durchführung eines Koeffizientenvergleichs zur Bestimmung der Koeffizienten A_i, B_i und C_i.
- Rücktransformation von X(s) durch Rücktransformation der Partialbrüche mit Hilfe von bekannten tabellarisierten Beziehungen.

	Originalfunktion x(t)	**Bildfunktion X(s)**
Linearität:	$k_1\cdot x_1(t)+k_2\cdot x_2(t)$	$k_1\cdot X_1(s)+k_2\cdot X_2(s)$
Verschiebungssatz: (Verschiebung im Zeitbereich)	$x(t-t_0)$	$X(s)\cdot e^{-st_0}$
Modulationssatz: (Verschiebung im Frequenzbereich)	$x(t)\cdot e^{at}$	$X(s-a)$
Ähnlichkeitssatz: (Zeitskalierung)	$x(at)$	$\frac{1}{a}\cdot X\left(\frac{s}{a}\right)$ für $a>0$
Frequenzskalierung	$\frac{1}{a}\cdot x\left(\frac{t}{a}\right)$ für $a>0$	$X(s\cdot a)$
Differentiation im Zeitbereich:	$\frac{d}{dt}x(t)$	$s\cdot X(s)-x(0^-)$
Integration im Zeitbereich:	$x(t)=\int_{\tau=0^-}^{t}x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}\cdot X(s)$
Differentiation im Frequenzbereich:	$(-t)^n\cdot x(t)$	$\frac{d^n}{ds^n}X(s)$
1. Anfangswertsatz	$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\cdot X(s)$	
2. Anfangswertsatz	$\dot{x}(0^+)=\lim_{s\to\infty}\left[s^2\cdot X(s)-s\cdot x(0^+)\right]$	

Endwertsatz	$\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = \lim\limits_{s \to 0} s \cdot X(s)$	
Faltung im Zeitbereich	$x(t) * y(t)$	$X(s) \cdot Y(s)$
Faltung im Frequenzbereich	$(2\pi\ j) \cdot x(t) \cdot y(t)$	$X(s) * Y(s)$

Originalfunktion	**Bildfunktion**	**Originalfunktion**	**Bildfunktion**
$\delta(t)$	1	$\varepsilon(t) \cdot \left(e^{a \cdot t} - 1\right)$	$\frac{a}{s \cdot (s - a)}$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\varepsilon(t) \cdot \sin(a \cdot t)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\varepsilon(t) \cdot t$	$\frac{1}{s^2}$	$\varepsilon(t) \cdot \cos(a \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\varepsilon(t) \cdot \frac{t^n}{n!} \quad n = 0,1,2\cdots$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\varepsilon(t) \cdot \sinh(a \cdot t)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{s + a}$	$\varepsilon(t) \cdot \cosh(a \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{a \cdot t}$	$\frac{1}{s - a}$	$\varepsilon(t) \cdot e^{-b \cdot t} \cdot \sin(a \cdot t)$	$\frac{a}{(s + b)^2 + a^2}$
$\varepsilon(t) \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{a \cdot t}$	$\frac{1}{(s - a)^n}$	$\varepsilon(t) \cdot e^{-b \cdot t} \cdot \cos(a \cdot t)$	$\frac{s + b}{(s + b)^2 + a^2}$
$\varepsilon(t) \cdot \left(1 - e^{-a \cdot t}\right)$	$\frac{a}{s \cdot (s + a)}$		

LTI-Systeme:

Kausale Systeme:

Die Ausgangssignale treten entweder zeitgleich oder verzögert mit den Eingangssignalen auf.

Ideale Systeme:

Die Kausalität wird hier nicht zwingend vorausgesetzt.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

Hinweise:

- Aufgrund der in der Herleitung vollzogenen Nullsetzung der Anfangsbedingung, beschreibt eine Übertragungsfunktion H(s) ein LTI-System nur im eingeschwungenen Zustand.
- Bei stabilen Systemen gilt der Übergang: $H(j\omega) = H(s)\big|_{s = j\omega}$.
- H(s) und H(jω) werden Übertragungsfunktionen genannt.

Weitere Begriffe:

Frequenzgang: $H(j\omega)=|H(j\omega)|\cdot e^{j\varphi(\omega)}$

Betragsfrequenzgang bzw. Amplitudengang: $|H(j\omega)|$

Phasengang: $\varphi(\omega)$

(Absolut) stabiles System:

Alle Pole von H(s) müssen einen negativen Realteil aufweisen, also in der linken s-Halbebene liegen.

Bedingt stabiles System:

Bedingt stabile Systeme sind Oszillatoren. Sie haben zusätzlich auch Pole auf der jω-Achse.

5. Zeitdiskrete Systeme

Für das abgetastete Signal erhält man somit den mathematischen Zusammenhang:

$$\boxed{x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\cdot T)\cdot\delta(t-n\cdot T)}$$

Voraussetzung für die Rückgewinnung von $X(j\omega)$ ist allerdings, dass die verschobenen Teilspektren $X(j\omega)$ sich in $X_a(j\omega)$ nicht überlappen. Diese Bedingung beschreibt das Abtasttheorem, welches wie folgt lautet:

$$\boxed{\omega_{abt}\geq 2\cdot\omega_g} \text{ bzw. } \boxed{f_{abt}\geq 2\cdot f_g} \text{ bzw. } \boxed{T_{abt}\leq\frac{1}{2\cdot f_g}}$$

Hierbei wird eine Abtastung mit $\omega_{abt} > 2\omega_g$ auch Überabtastung genannt, während man bei einer Abtastung mit $\omega_{abt} < 2\omega_g$ von einer Unterabtastung spricht.

Impulsfolge: $\delta(k-n)=\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\ \textit{für}\ \begin{matrix}k=n\\k\neq n\end{matrix}$ **Einheitssprungfolge:** $\varepsilon(k)=\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\ \textit{für}\ \begin{matrix}k>0\\ sonst\end{matrix}$

Rechteckfolge: $rect(k1,k2)=\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\ \textit{für}\ \begin{matrix}k1\leq k\leq k2\\ sonst\end{matrix}$

Fouriertransformation zeitdiskreter Signale:

$$\boxed{X(e^{j\Omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot e^{-j\Omega\cdot n}}$$

$$\boxed{x(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega=-\pi}^{+\pi} X_a(e^{j\Omega})\cdot e^{+j\Omega\cdot n}\,d\Omega}$$

6. Z-Transformation:

Zur Vermeidung dieser Periodizität wird die s-Ebene durch die Abbildung $z=e^{sT}$ eindeutig und nichtlinear auf die z-Ebene abgebildet.

Einseitige z-Transformation	**Zweiseitige z-Transformation**	**z-Rücktransformation**
$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k}$	$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k}$	$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C X(z) \cdot z^{k-1} dz$
Für kausale Signale und Systeme		

Partialbruchzerlegung und Verwendung von Tabellen

Vorgehensweise:

- Bestimmung der Polstellen des zu transformierenden Ausdrucks $X(z)$. Hierbei erhält man ggf.:
  - Einfache Polstellen $(z - z_\infty)$
  - N-fache Polstellen $(z - z_\infty)^N$
  - Einfache komplexe Polstellen $(z - z_\infty) \cdot (z - z_\infty^*)$
  - N-fache komplexe Polstellen $\left[(z - z_\infty) \cdot (z - z_\infty^*)\right]^N$
- Der Ausdruck $X(z)$ kann nun als Summe von Partialbrüchen dargestellt werden, wobei je nach Art der Polstelle, folgende Ausdrücke angesetzt werden müssen:
  - Für jede einfache Polstelle: $\frac{A}{z - z_\infty}$
  - Für jede N-fache Polstelle: $\frac{A_1}{(z - z_\infty)^N} + \frac{A_2}{(z - z_\infty)^{N-1}} + \cdots + \frac{A_N}{z - z_\infty}$
  - Für jede einfache komplexe Polstelle: $\frac{B \cdot z + C}{(z - z_\infty) \cdot (z - z_\infty^*)}$
  - Für jede N-fache komplexe Polstelle:

$$\frac{B_1 \cdot z + C_1}{\left[(z - z_\infty) \cdot (z - z_\infty^*)\right]^N} + \frac{B_2 \cdot z + C_2}{\left[(z - z_\infty) \cdot (z - z_\infty^*)\right]^{N-1}} + \cdots + \frac{B_N \cdot z + C_N}{(z - z_\infty) \cdot (z - z_\infty^*)}$$

- Durchführung eines Koeffizientenvergleichs zur Bestimmung der Koeffizienten A_i, B_i und C_i.
- Rücktransformation von $X(z)$ durch Rücktransformation der Partialbrüche mit Hilfe von bekannten tabellierten Beziehungen.

Oder: **Divisionsverfahren**: Analog Polynomdivsion

	Folgenbereich $x(k)$	Z-Bereich $X(z)$
Linearität	$a_1 \cdot x_1(k) + a_2 \cdot x_2(k)$	$a_1 \cdot X_1(z) + a_2 \cdot X_2(z)$
Rechts-Verschiebung	$x(k-i)$ mit $i > 0$	$X(z) \cdot z^{-i}$
Links-Verschiebung	$x(k+i)$ mit $i > 0$	Zweiseitige z-Transformation $X(z) \cdot z^{i}$ Einseitige z-Transformation $X(z) \cdot z^{i} - \sum_{m=0}^{i-1} z^{-m} \cdot x(m)$
Ähnlichkeitssatz:	$a^k \cdot x(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
Lineare Gewichtung	$k \cdot x(k)$	$-z \cdot \frac{d}{dz} X(z)$
Differenzentheorem	$x_2(k) = x_1(k) - x_1(k-1)$	$X_2(z) = \frac{z-1}{z} \cdot X_1(z)$
Summentheorem	$x_2(k) = \sum_{m=0}^{k} x_1(m)$	$X_2(z) = \frac{z}{z-1} \cdot X_1(z)$
Anfangswertsatz	$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$	
Endwertsatz	$\lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) \cdot X(z)$	
Faltung im Zeitbereich	$x(k) * y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot y(k-n)$	$X(z) \cdot Y(z)$
Multiplikation im Zeitbereich	$x(k) \cdot y(k)$	$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C X\left(\frac{z}{z_0}\right) \cdot Y(z_0) \cdot z_0^{-1} dz_0$

Folgenbereich	z-Bereich
$\delta(k)$	1
$\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$\varepsilon(k) \cdot k$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\varepsilon(k) \cdot k \cdot a^k$	$\frac{z \cdot a}{(z-a)^2}$
$\varepsilon(k) \cdot k^2 \cdot a^k$	$\frac{z \cdot a \cdot (z+a)}{(z-a)^3}$
$\varepsilon(k) \cdot k^3 \cdot a^k$	$\frac{z \cdot a \cdot (z^2 + 4a \cdot z + a^2)}{(z-a)^4}$

Folgenbereich	z-Bereich
$\varepsilon(k) \cdot \cos(a \cdot k)$	$\frac{z \cdot (z - \cos(a))}{z^2 - 2z \cdot \cos(a) + 1}$
$\varepsilon(k) \cdot \sin(a \cdot k)$	$\frac{z \cdot \sin(a)}{z^2 - 2z \cdot \cos(a) + 1}$
$\varepsilon(k) \cdot k \cdot \sin(a \cdot k)$	$\frac{z \cdot (z^2 - 1) \cdot \sin(a)}{(z^2 - 2z \cdot \cos(a) + 1)^2}$
$\varepsilon(k) \cdot k \cdot \cos(a \cdot k)$	$\frac{z \cdot [(z^2 + 1) \cdot \cos(a) - 2z]}{(z^2 - 2z \cdot \cos(a) + 1)^2}$

$\varepsilon(k)\cdot a^k$	$\frac{z}{z-a}$		
$\varepsilon(k)\cdot\binom{k}{n}\cdot a^{k-n}$	$\frac{z}{(z-a)^{n+1}}$		

Faltung: $x(k) * y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot y(k-n)$ **KKF:** $\varphi_{xx}^{E}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot y(k+n)$

EDS: $\phi_{xx}^{E}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}^{E}(m)\cdot e^{-j\Omega m} = \left|X(e^{j\Omega})\right|^2$ $\varphi_{xx}^{E}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega=-\pi}^{+\pi} \phi_{xx}^{E}(\Omega)\cdot e^{j\Omega m} d\Omega$

$$E_x = \varphi_{xx}^{E}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}^{E}(\Omega) d\Omega$$

LSI-Systeme:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

Stabilitätsbedingung: $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < \infty$

7. Stochastische Signale:

Eigenschaften der Verteilungsdichtefunktion:

$F_x(\vartheta \to \infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\vartheta) d\vartheta$ $f_x(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} F_x(\vartheta) \geq 0$ $P(\{\eta : \vartheta_1 < x(\vartheta) < \vartheta_2\}) = F_x(\vartheta_2) - F_x(\vartheta_1)$

Erwartungswertoperator: $E\{g(x(\eta))\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vartheta)\cdot f_x(\vartheta) d\vartheta$

Erwartungswert = Mittelwert aller Realisationen: $m_x = E\{x(\eta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta\cdot f_x(\vartheta) d\vartheta$

Varianz = 2. zentrales Moment = Standardabweichung.^{2}:

$$\sigma_x^2 = \mu_x^{(2)} = E\{[x(\eta) - m_x]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\vartheta - m_x]^2 \cdot f_x(\vartheta) d\vartheta$$

Leistung = 2. Moment = $P_x = m_x^{(2)} = E\{x(\eta)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta^2 \cdot f_x(\vartheta) d\vartheta$

Es gilt: $P_x = \sigma_x^2 + m_x^2$ Bei **Gleichverteilung:** $\sigma_x^2 = \frac{a^2}{12}$ mit $\frac{1}{a} rect\left(\frac{t}{a}\right)$

Gaußverteilung: $f_x(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}\cdot(\vartheta - m_x)^2}$

$$P(\{\eta : (m_x - \sigma_x) < x(\eta) \leq (m_x + \sigma_x)\}) = \int_{\vartheta = m_x - \sigma_x}^{m_x + \sigma_x} f_x(\vartheta) d\vartheta = 63{,}3\%$$

$$P(\{\eta : (m_x - 2\sigma_x) < x(\eta) \leq (m_x + 2\sigma_x)\}) = \int_{\vartheta = m_x - 2\sigma_x}^{m_x + 2\sigma_x} f_x(\vartheta) d\vartheta = 95{,}5\%$$

$$P(\{\eta : (m_x - 3\sigma_x) < x(\eta) \leq (m_x + 3\sigma_x)\}) = \int_{\vartheta = m_x - 3\sigma_x}^{m_x + 3\sigma_x} f_x(\vartheta) d\vartheta = 99{,}7\%$$

Signal-Rausch-Verhältnis: $\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{P_s}{P_n}$

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}^L(\omega) d\omega = \varphi_{xx}^L(0) \quad \varphi_{xx}^L(\tau \to \infty) = m_x^2$$

Stochastische Signale in Verbindung mit LTI-Systeme:

$$m_y = m_x \cdot H(j\omega)|_{\omega=0} \quad \phi_{YY}^L(\omega) = \left|H(j\omega)\right|^2 \cdot \phi_{xx}^L(\omega) \quad \phi_{xy}^L(j\omega) = H(j\omega) \cdot \phi_{xx}^L(\omega)$$

Stochastische Signale in Verbindung mit LSI-Systeme:

$$m_y = m_x \cdot H(z)|_{z=1} \quad \phi_{YY}^L(\Omega) = \left|H(e^{j\Omega})\right|^2 \cdot \phi_{xx}^L(\Omega) \quad \phi_{xy}^L(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) \cdot \phi_{xx}^L(\Omega)$$

Ein gaußverteilter Eingangsprozess führt IMMER zu einem gaußverteilten Ausgangsprozess.